Лекция 2. Ортогональные системы на отрезке и числовой прямой

Существует множество ортогональных систем функций, заданных на отрезке и числовой прямой. Наиболее широко применяются следующие их виды:

1. Тригонометрическая система
2. Многочлены Лежандра. Они получаются ортогонализацией одночленов x^n на отрезке [-1,1]

$$R_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n$$

3. Функции Эрмита - произведения многочленов Эрмита на собственные функции преобразования Фурье.
Образуют ортогональную систему на всей числовой прямой.
Многочлены Эрмита являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - x^2 = \mu f$$

Полиномиальные решения этого уравнения существуют при μ = *-(2n+1), n=0,1,2,3,...* С точностью до постоянного сомножителя полиномы Эрмита совпадают с совпадают с выражениями

$$H_n^* = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

Спектр сигнала. Качество восстановления сигнала. Эффект Гиббса

Для периодической функции представление в виде ряда Фурье определяет спектр сигнала. Скорость сходимости ряда определяется дифференциальными свойствами исходной функции. Чтобы продемонстрировать данный факт, следует опираться на следующие теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании рядов.

Почленный переход к пределу

Рассматриваем функциональный ряд

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots \qquad (1)$$

Теорема 1. Пусть каждая из функций $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *определена в области* X *и имеет при стремлениях* x *к* a *конечный предел:*

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = c_n$$

Если ряд (1) в области сходится равномерно, то
1) сходится ряд составленный из этих пределов
и 2) сумма ряда (1) также имеет при предел, именно: $\sum_{1}^{\infty} c_n = C$

Почленное интегрирование рядов

Теорема. Если функции $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,b]$ *и составленный из них ряд сходится в этом промежутке равномерно, то сумма ряда также будет интегрируема и интеграл от суммы ряда представляется следующим образом:*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x) d\mu$$

Почленное дифференцирование рядов

Теорема. Пусть функции $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *определены в промежутке* $X=[a,b]$ *и имеют в нем конечные производные* $u'_n(x)$. *Если ряд (1) сходится хоть в одной точке, а ряд, составленный из производных равномерно сходится на всем промежутке X, то тогда ряд (1) сходится равномерно на всем промежутке и его сумма имеет в X производную, выражаемую равенством вида:*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$